20.03.14 ① **Das diskrete Wahrscheinlichkeitsmodell (W-Modell)**

Def.: Für eine abzählbare Menge Ω heißt eine Funktion $\overset{\text{Wahrscheinlichkeit}}{P}: \underbrace{\mathcal{P}(\Omega)}_{\text{Potenzmenge}} \to [0,1]$

Definition — Axiom: Normalisierung

W-Verteilung falls gilt: (N) $P(\Omega) = 1$ => Kolmogorov-Axiome

Axiom: Additivität

(A) $A \cap B = \emptyset$ = Disjunkt -> kein Element gemeinsam

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (A,B \subseteq \Omega;\ \text{d.h. } A,B \in \mathcal{P}(\Omega))$$

Ω nennt man Ereignismenge und Teilmengen (A,B) dann Ereignisse.

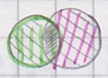
Bsp.: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6}$ mit $|A| :=$ Anzahl der Elemente von $A \subseteq \Omega$ (beliebig)

a) $P(\emptyset) = 0$ $\qquad$ b) $P(\{2,5,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Nachweis von (N) und (A): (N) $P(\Omega) = \frac{6}{6} = 1$ ✓

(A) $|A \cup B| = |A| + |B|$, falls $A \cap B = \emptyset$

$$P(A \cup B) = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B) \ ✓$$



Bem.: a) $P(A \cup B) = P(\underbrace{A \cup (B \setminus (A \cap B))}_{\text{disjunkte Zerlegung}}) \overset{(A)}{=} P(A) + P(B \setminus (A \cap B))$

b) $P(\emptyset) = 0$ gilt immer => $\boxed{P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) \underset{\emptyset \cap \emptyset = \emptyset}{\overset{(A)}{=}} P(\emptyset) + P(\emptyset)}$ => $P(\emptyset) = 0$

Def.: Ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ mit $P(A) = 0$ bzw. 1 heißt unmöglich bzw. sicher. Ereignisse $\{\omega\}$ mit nur einem Element $\omega \in \Omega$ heißen Elementarereignisse. Die Fkt. $p(\omega) = P(\{\omega\})$ heißt (Einzelelemente von Ω (Omega) = ω (Omega))

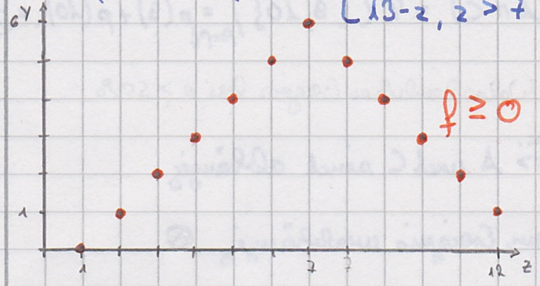
W-Funktion oder auch Zähldichte.

Bem.: $\boxed{P(A) \overset{(A)}{=} \sum_{a \in A} p(a)}$

Bsp.: $P(\{1,2,3\}) = p(1) + p(2) + p(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Bsp.: für eine W-Verteilung von g, die keine Gleichverteilung ist. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,\dots,12\} \ (\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{N}_{12})$

Hilfsfunktion: $f(z) = \begin{cases} z-1, & z \le 7 \\ 13-z, & z > 7 \end{cases}$ auf Ω.



Def.: $p(z) = \frac{f(z)}{\sum_{z=1}^{12} f(z)} = \frac{f(z)}{36}$

$\boxed{\sum_{z=1}^{12} p(z) = 1}$

Diese Fkt. p definiert also eine W-Funktion $p: \Omega \to [0,1]$

← Zufallsvariable X "Groß X"

Def.: (wichtig!) Eine Fkt. $X: \Omega \longrightarrow Z$ nach einer (ganz) beliebigen Menge Z heißt Zufallsvariable

Dabei ist Ω als Ereignismenge vorausgesetzt.

Bsp.: $\Omega := \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6$ (für zweifaches Würfeln) $\overset{\text{Def}}{=} \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{N}_6\} = \{(1,1),(1,2),\dots(1,6),(2,1),\dots\}$

$\Rightarrow |\Omega| = 6 \cdot 6 = \underline{36}$

Funktion = Augensumme   Zielmenge

$X(m,n) := m+n \in \mathbb{N}_{12}\ (= Z)$

Def.: (wichtig!!) Für eine Zufallsvariable $X: \Omega \to Z$ wird auf Z eine (neue) W-Verteilung definiert durch $P_X(C) =$ „$P\{X \in C\}$" $:= P(\underset{\text{Urbildmenge}}{X^{-1}}(C)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in C\})$. Sie heißt die Verteilung von X.

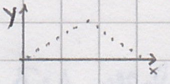
X ≙ Abhängigkeit von Zufallsvariable

Bsp.: $X: \Omega \to \mathbb{N}_{12}$ wie oben, P = Gleichverteilung auf $\Omega = \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6$, d.h. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{36}$

$X(m,n) = m+n \Rightarrow P_X(C) \overset{\text{Def.}}{=} P\{X \in C\}$ bzw. $p_X(z) = P(\{(m,n) \in \Omega \mid m+n = C\})$

$z \in \mathbb{N}_{12} = Z$ Zielbereich = Zustandsmenge

Zahlenbeispiel: $p_X(1) = 0$; $p_X(2) = \frac{1}{36}$; $p_X(3) = \frac{2}{36}$ $[(1,2),(2,1)]$, …, $p_X(7) = \frac{6}{36}\ (= \frac{1}{6})$; $p_X(8) = \frac{5}{36}$

$p_X(12) = \frac{1}{36}$  $\Rightarrow p_X = p: \mathbb{N}_{12} \to [0,1]$ wie letzte Vorlesung

Zahlenbeispiel: W dafür, dass mit zwei Würfeln die Summe 9 gewürfelt wird beträgt $p_X(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11 \approx 11\,\%$ bzw. mindestens 9 gewürfelt wird $P_X(\{9,10,11,12\}) = p_X(9)+p_X(10)+p_X(11)+p_X(12)$

$= \frac{4+3+2+1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

Bem: P_X ist tatsächlich eine W-Verteilung mit der Eigenschaft $P_X(C) = \sum_{x \in C} p_X(x)$, also p_X als zugehörige Dichtefunktion.

Def.: Zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ heißen unabhängig, wenn gilt $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$ ⊛

P(A) unter der Bedingung B

Für ein Ereignis $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) \neq 0$ (B „möglich") heißt $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ die W von $A \subseteq \Omega$ unter der Bedingung B.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bem.: $P(A|B) = P(A)$ gilt genau dann, wenn A und B unabhängig sind.

Bsp.: P_X (statt P) wie im letzten Beispiel. $A := \{9,10,11,12\}$, $B := \{1,2,3\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ Disjunkt

$P(A \cap B) = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$ (analog: $P(B|A) = 0$) Wegen $P(A), P(B) \neq 0$ sind A, B abhängig

$C = \{8,9,10\} \Rightarrow A \cap C = \{9,10\} \Rightarrow P(A \cap C) = P(\{9,10\}) \underset{P=P_X}{=} p(9) + p(10) = \frac{7}{36}$

$\Rightarrow P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{7}{10} = 70\,\%$ Wahrscheinliches Ereignis bei $p > 50\,\%$

$P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underset{33\%}{P(C)} \neq \underset{70\%}{P(C|A)} \overset{\text{Bem.}}{\Longrightarrow} A$ und C sind abhängig

Bem: Jedes unmögliche Ereignis ist von jedem anderen Ereignis unabhängig ⊛

„Vierfeldertafel"-Bsp.: $\Omega :=$ Menge von Touristen; $E :=$ Menge derjenigen die Englisch können

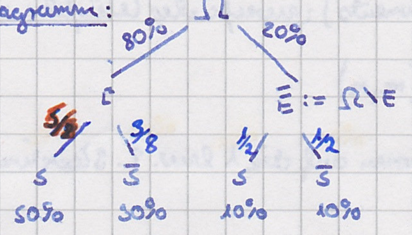
$S :=$ Menge derjenigen, die Spanisch können

Ω	E	$\bar{E}$	
S	50%	10%	60%
$\bar{S}$	30%	10%	40%
	80%	20%	

Umfrage: $P(E) = 80\,\%$, $P(S) = 60\,\%$, $P(E \cap S) = 50\,\%$

$P(S|E) = \frac{P(S \cap E)}{P(E)} = \frac{5}{8} = 62{,}5\,\% \neq P(S) = 60\,\%$ → abhängig

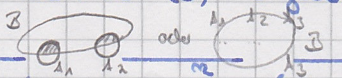
Baumdiagramm:



Bem dazu: Die bed. W kann also Faktor (als) zwischen W en angesehen werden, bei der die eine W durch Mengeneinschränkung aus der anderen hervorgeht:

$$\underbrace{P(E)}_{80\%} \cdot \underbrace{P(S|E)}_{5/8} = \underbrace{P(S \cap E)}_{50\%} \iff \boxed{P(S|E) = \frac{P(S \cap E)}{P(E)}}$$

Die Bayes-Formel: Für eine disjunkte Zerlegung $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ mit $P(A_j) > 0$ für $j = 1 \ldots n$ und ein $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) > 0$ gilt: $\boxed{P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) P(B|A_j)}}$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$



$$\sum_{j=1}^{n} P(A_j) P(B|A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j) \overset{(A)}{=} P\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{n} (B \cap A_j)\right) = P(B)$$

Vereinigungssymbol

$$\overset{\text{Bayes}}{\iff} \underbrace{P(A_i|B) \cdot P(B)}_{P(A_i \cap B)} = \underbrace{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}_{P(A_i \cap B)}$$

Bsp.: Maschine M_i produziert $i \cdot 1000$ Bauteile ($i \in \mathbb{N}_3$) mit Ausschuss 4%, 2%, 4%. Mit welcher W stammt ein zufällig ausgewähltes Ausschussteil von Maschine 1. (M_1)?

ohne Bayes → $4\% \cdot \overset{M_1}{1000} = 40$; $2\% \cdot \overset{M_2}{2000} = 40$; $4\% \cdot \overset{M_3}{3000} = 120$ → Ausschuss gesamt $= 200$ → $p = \frac{40}{200} = 20\%$

mit Bayes: $\Omega :=$ Menge aller Bauteile mit $|\Omega| = 6000$; $M_i :=$ Menge der Bauteile der i-ten Maschine

$P :=$ Gleichverteilung auf Ω; $A :=$ Menge der Ausschussteile

Geg.: $P(A|M_1) = 4\%$; $P(A|M_2) = 2\%$, $P(A|M_3) = 4\%$

Ges.: $P(M_1|A) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(M_1) \cdot P(A|M_1)}{P(M_1)P(A|M_1) + P(M_2)P(A|M_2) + P(M_3)P(A|M_3)} = \frac{1/6 \cdot 4}{1/6 \cdot 4 + 2/6 \cdot 2 + 3/6 \cdot 4} = \underline{\underline{20\%}}$

$\frac{|M_1|}{|\Omega|} = \frac{1000}{6000}$

4%

Def.: Abzählbar viele Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ heißen unabhängig, wenn für jede Indexmenge $\{j_1, \ldots, j_k\} \subset \mathbb{N}$ (der Mächtigkeit k) gilt $\boxed{P(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k}) = \prod_{l=1}^{k} P(A_{j_l})}$

also $\{1,2\} = \{1,2,2\}$ ist ausgeschlossen, also Kreuzchecks

Bsp.: $\Omega := \mathbb{N}_6$; $A = B := \mathbb{N}_3$, $C = \{1,4,5,6\}$. $P =$ Gleichverteilung → $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. $P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ aber noch nicht unabhängig, da "jede" → 1, (1,2) auch noch überprüfen

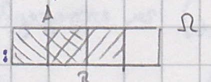
da nur die 1 in allen 3 drin

weitere Indexmenge $\{1,2\} \subseteq \mathbb{N}_3$, wenn $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$ → Fazit: A, B, C sind abhängig

Falsche Vermutung: A, B unabhängig $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$ ↯ stimmt nicht ↯

Gegen-Bsp.:



$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} A, B$ unabhängig

Def.: Abzählbar viele Zufallsvariablen $X_1 : \Omega \to Z_1$; $X_2 : \Omega \to Z_2, \ldots$ heißen unabhängig, wenn für alle $C_j \subseteq Z_j$ ($j = 1, 2, \ldots$) die Ereignisse $\{\underbrace{X_j \in Z_j}_{A_j \text{ in obiger Def.}}\} = X_j^{-1}(C_j) \subseteq \Omega$ unabhängig sind.

Praktisches Bsp.: (eines mehrstufigen Zufallsexperiments): zweifaches Würfeln: $X_1 : \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6 \to$

$Z := \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6$ mit $X := \text{id}$ (identität), d.h. $X(m,n) = (m,n)$

$X_1(m,n) := m$; $X_2(m,n) := n$ (als Projektionen auf die 1 bzw. 2. Koordinate), P als Gleichverteilung auf $\Omega := \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6$

Behauptung: X_1, X_2 sind unabhängig

Bem: Im Fall von abzählbaren Zustandsmengen $Z_1, Z_2, \ldots$ genügt es die Ereignisse $\{X_j = c_j\}$ $(c_j \in Z_j)$ zu betrachten. Hier gilt $Z_1 := Z_2 := \mathbb{N}_6$

Hier: Zahl von 1 bis 6

$\Rightarrow X_1^{-1}(c) = \{c\} \times \mathbb{N}_6,$

$X_2^{-1}(d) = \mathbb{N}_6 \times \{d\} \subseteq \Omega$

$\Rightarrow P\{X_1 = c\} = P(\{c\} \times \mathbb{N}_6) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = P\{X_2 = d\}$

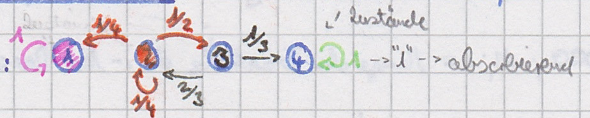
$\Rightarrow P\{X_1 = c\} \cdot P\{X_2 = d\} = \frac{1}{36} = P\{X_1 = c, X_2 = d\}$ => Beweis Ende $\square$

27.03.14 **Beispiel eines mehrstufigen Zufallsexperiments mit nicht-unabhängigen Projektionen X_n**

suggestive Schreibweise

Markov-Kette: erklärt am Kullerbeispiel 'Irrfahrt'

Bsp.:



"Übergangswahrscheinlichkeiten" $q(j|i) = q(j|i)$ von i nach j für Zustände $i,j \in Z := \mathbb{N}_4$

? => Zeilensummen der "stochastischen" Matrix $Q := (q(j|i))_{i,j \in \mathbb{N}_4}$ sind Eins: → laufenden laufen von 1 bis 4

$$\sum_{j=1}^{4} q(j|i) = 1 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_4$$

(Näheres zum Rechnen mit der "Übergangsmatrix" Q → in Stochastische Prozesse SP)

Zusammenhang mit W-Modell: Die Menge $Z^{\mathbb{N}_0} := \{(z_0, z_1, z_2, \ldots) \; z_n \in Z, n \in \mathbb{N}_0\}$ aller Folgen $\mathbb{N}_0 \to Z$ stellt die Menge aller "Irrpfade" dar, wobei der Index n einen diskreten Zeitpunkt darstellt; d.h. die „Koordinate" z_n zeigt an, dass zum Zeitpunkt n der Zustand z_n vorliegt. z.B.:

z.B.: $z_0 := 3$; $z_1 := 2$; $z_2 := 3$; $z_3 := 2$; $z_4 := 1$; $z_5 := 1, \ldots$ stellt ein möglichen Pfad der Zufallsvariablen $X_n(z_0, z_1, z_2, \ldots) := z_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ => Interessant: $P\{X_n = 3\} = ?$

? Was ist hier das P? $p(z_0, z_1, \ldots) := p_0(z_0) \prod_{n=1}^{\infty} q(z_n | z_{n-1})$ zu vorgegebenem $p_0 : Z \to [0,1]^{\mathbb{N}_4}$ ("Startverteilung")

Teilmenge der Zustandsmenge

$(\Rightarrow P\{X_n \in C\} = \underbrace{\sum_{c \in C} P\{X_n = c\}}_{P \text{ von allen Folgen, wenn die } n\text{-te Komponente } = c \text{ ist}} = \sum_{c \in C} \sum_{z_n = c} \underbrace{p(z_0, z_1, \ldots)}_{}$ → in der Regel nicht interessant, sondern das „asymptotische Verhalten" → SP

27.03.2014

StPr

Wichtige diskrete W-Verteilungen

Def.: Für eine Zufallsvariable $X: \Omega \to \mathbb{Z}$ heißt $\overset{E(X)}{EX} := \sum_{\omega\in\Omega} \overset{\text{Einzelwahrsch.}}{p(\omega)}\, \overset{\text{Wert an der Stelle } \omega}{X(\omega)}$ der Erwartungswert von X

$$V(x) = \overset{\geq 0}{VX} := E\left((X-EX)^2\right) = E(X^2) - (EX)^2 \geq 0$$

Bsp.: Einfaches Würfeln: $\Omega := \mathbb{N}_6$ mit Gleichverteilung P $\left(\Rightarrow p \overset{\text{konstant}}{\equiv} \frac{1}{6}\right)$; $X =$ Augenzahl; $X := \overset{\text{Identität}}{id} : \mathbb{N}_6 \to \mathbb{N}_6 \overset{\text{echte Teilmenge}}{\subset} \mathbb{R}$

$$\Rightarrow EX = \sum_{\omega\in\mathbb{N}_6} \overset{p}{\frac{1}{6}} \cdot \omega = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} \omega = \frac{1}{6} \sum_{\omega=1}^{6} \omega = \frac{21}{6} = \underline{\underline{3{,}5}}$$

$$\Rightarrow V(x) = VX = ?\ ; \quad EX^2 = \sum_{\omega\in\mathbb{N}_6} \frac{1}{6} \cdot \omega^2 = \frac{1}{6} \sum_{\omega=1}^{6} \omega^2 = \frac{91}{6} = 15\tfrac{1}{6} \quad \Rightarrow VX = 15\tfrac{1}{6} - 3{,}5^2 = \underline{\underline{\frac{35}{12}}}$$

Denn Def.: $\sqrt{VX} =: \sigma X$ heißt Standardabweichung

A) **Binomial-Verteilung** Modell: "Einzeltrefferwahrscheinlichkeit" $p \in [0,1] \to$ "Schussserie" (n Schüsse)

$$\boxed{p(\overset{\text{Treffer}}{m}) := \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}}$$ → Urne + Kugeln mit Zurücklegen der Kugeln

mit Binomialkoeffizient $\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!}$ mit $0! := 1$ und $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot2\cdot3\ldots n$

Damit ist tatsächlich eine W-Fkt (Zähldichte) $p: \{0,1,\ldots,n\} \to [0,1]$ definiert:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \underset{a}{p^m} \underbrace{(1-p)}_{=b}{}^{n-m} \overset{\text{binom.}}{\underset{\text{Formel}}{=}} (p+(1-p))^n = 1^n = 1$$

Die zugehörige W-Verteilung P heißt Binomialverteilung zu den Parametern $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$

B) **Hypergeometrische Verteilung** Urnenmodell: Schwarze und weiße (roter) Kugeln in einer Urne; Ziehen ohne Zurücklegen

Drei Parameter: $n :=$ Anzahl der Ziehungen; $r :=$ Anzahl roter Kugeln, $s :=$ Anzahl schwarzer Kugeln

Die Funktion $\boxed{p(m) := \frac{\binom{r}{m}\binom{s}{n-m}}{\binom{r+s}{n}}}$ definiert (wieder) eine W-Funktion auf $\{0,1,\ldots r, r+1, \ldots\}$. Sie entspricht der W.keit dafür, dass man m rote Kugeln beim n-maligen Ziehen ohne Zurücklegen erhält

C) **Geometrische Verteilung** "Einzeltrefferwahrscheinlichkeit" $p \in \,]0,1[$ mit $\boxed{p(m) := (1-p)^m \cdot p}$ beschreibt die W-keit dafür, dass man m-mal nicht trifft, bevor man beim $(m+1)$-ten Mal trifft

D) **Poisson-Verteilung** Zum Parameter $\lambda > 0$ definiert $p(m) := e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$ eine W-Fkt.

$$p: \mathbb{N}_0 \to [0,1] \quad \boxed{\sum_{m=0}^{\infty} p(m) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!}}_{=\exp(\lambda)} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1}$$

⇒ Verteilung	E	V	→ $\sigma = \sqrt{V}$
A) Binomial-V	$n \cdot p$	$n \cdot p(1-p)$	$\sqrt{np(1-p)}$
B) Hypergeometrische-V	$\frac{n \cdot r}{R}$ mit $R := r+s$	$\frac{nr}{R}\left(1-\frac{r}{R}\right)\cdot\left(1-\frac{n-1}{R-1}\right)$	⋮
C) Geometrische-V	$\frac{1}{p} - 1$	$\frac{1-p}{p^2}$	
D) Poisson-V	λ	λ	

Bem.: a) Für großes r und kleines n stimmt die W-Funktion der hypergeometrischen Verteilung ungefähr mit der der binomischen Verteilung überein.

b) Für große n und kleine $p > 0$, und zwar so, dass $\lambda := n \cdot p \leq 10$ und $n \geq 1500p$, gilt

$$\boxed{\binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \approx e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{m!}}$$

Beispiel¹: $n := 100$, $p := 60\%$, $(m := 55) \Rightarrow n \cdot p = 60 \not\leq 10 \rightarrow$ keine gute Approximation

Beispiel²: 500 Patienten, Medikament mit 1‰ Nebenwirkungen; Wie groß ist die W.keit, dass mind. drei Patienten Nebenwirkungen zeigen?

Komplementärereignis Trick!

Binomialverteilung mit Parametern $n := 500$; $p := 1‰$ $\rightarrow$ Gesucht: $\sum_{m=3}^{n} p(m) = 1 - \sum_{m=0}^{2} p(m) =: q$

$$= 1 - \sum_{m=0}^{2} \binom{500}{m} 0{,}001^m \, 0{,}999^{500-m}$$

$\rightarrow$ Approximation durch Poisson: $\lambda := n \cdot p = 500 \cdot 0{,}001 = 0{,}5 \; (\leq 10)$ ✓

$1500 \cdot p = 1500 \cdot 0{,}001 = 1{,}5 \; (\leq 500 = n)$ ✓

$$q \approx 1 - \sum_{m=0}^{2} e^{-0{,}5} \cdot \frac{0{,}5^m}{m!} = 1 - e^{-0{,}5} \cdot \left(1 + 0{,}5 + \frac{0{,}25}{2}\right) = 1 - e^{0{,}5} \cdot 1{,}625 \approx 0{,}0144$$

Antwort: Ca 14‰

15) **Eigenschaften von E und V**

a) $E(aX + bY) = aEX + bEY$

c) $V(aX + b) = a^2 V(X) \Rightarrow \sigma(aX) = |a| \sigma X$

Im Schnitt die 0 da im 3,5 Schnitt beim Würfeln

e) $VX > 0$, Standardisieren: $X^* = \frac{X - EX}{\sigma X} \Rightarrow EX^* = 0$, $VX^* = 1$ bei allen Standardisierten Zufallsvariablen

h) X, Y unabhängig $\Rightarrow E(XY) = EXEY$ und $V(X+Y) = VX + VY$

? i) Im Fall $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ gilt $\boxed{EX = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{n=x+1}^{\infty} p(n) = \sum_{x=0}^{\infty} P\{X > x\}}$.

? k) Im Fall $a, X \geq 0$ gilt $\boxed{EX \geq a\, P\{X \geq a\}}$ (Markov-Ungleichung)

Beispiel: Die W-keit, dass ich mind. ⚄ ≙ 5 würfel ist höchstens (nach Markov) $\frac{3{,}5}{5} = 0{,}7 = 70\%$ (Genau wäre: 33%)

Etwas Kombinatorik a) Permutation • Anzahl aller Möglichkeiten n Elemente linear anzuordnen: $n!$

b) k-elementige Teilmengen • Anzahl der Möglichkeiten eine k-elementige Teilmenge aus einer n-elementigen Menge auszuwählen: $\binom{n}{k}$

$\binom{n}{k} \rightarrow \{$ Anzahl aller Teilmengen einer n-elementigen Menge: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$

S.9 c) Multinomialkoeffizient • Anzahl der Möglichkeiten $n = n_1 + n_2 + \ldots n_k$ Objekte linear anzuordnen, von denen jeweils n_j Objekte gleich sind ($j \in \mathbb{N}_k$): $\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$ ("Multinomialkoeffizient").

Bei $k = 2$ ist dies genau der Binomialkoeffizient $\frac{n!}{n_1!\, n_2!} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2} = \binom{n}{n - n_1}$

n Pascalsches Dreieck $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

0: 1
1: 1 1
2: 1 2 1
3: 1 3 3 1
4: 1 4 6 4 1
5: 1 5 10 10 5 1

27.03.14

d) Anzahl der Möglichkeiten n gleiche Objekte auf k verschiedene Fächer aufzuteilen $\binom{k+n-1}{n}$

?

Zahlenbeispiel: zwei Objekte in Fach 3, drei Obj. in Fach 4 und ein Objekt in Fach 7 mit $k=7$

Fächer	1	2	3	4	5	6	7
			$\circ\circ$	$\circ\circ\circ$			$\circ$

$n := 1+2+3 = 6$ → Binärzahl mit $k+n-1$ Stellen

| 100 | 000 | | 10

e) (Partitionszahl) Anzahl der Möglichkeiten eine n-elementige Menge in k Teilmengen mit jeweils $n_1, n_2 \ldots n_k$ Elementen aufzuteilen: $a(b_1, b_2, \ldots) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \cdot \frac{1}{b_1! b_2! \ldots}$

Hierbei bezeichnet b_l die Anzahl der l-elementigen Teilmengen, die bei dieser Aufteilung vorkommen.

(wenn also z.B. $n_1 = n_2 =: l < n_j$, dann $b_l = 2$)

- Zahlenbeispiel: eine Gruppe von 10 Leuten soll in 3 Mannschaften aufgeteilt werden, und zwar in 2 Dreiermannschaften und eine 4er-Mannschaft. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür (ohne Rollenverteilung der beiden Dreier-Mannschaften)?

Antwort: $a(0,0,2,1) = \frac{10!}{3!3!4!} \cdot \frac{1}{2! \cdot 1!} = \underline{2100}$

Bem.: Es gilt $n = n_1 + n_2 + \ldots + n = \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cdot l = \sum_{l=1}^{n} b_l \cdot l \Rightarrow \boxed{a(b_1, b_2, \ldots) = \frac{n!}{\prod b_l! \, \underbrace{(l!)^{b_l}}_{*}}}$

$* \to (l!)^{b_l}$

14 **2.6 Formel des Ein- und Ausschließens (Siebformel).** P ist additiv (1) $n=2$: $P(A \cup B)$

$n=2$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (A \cap B)$

$n=3$: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Allgemein wird folgende Formel per vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ bewiesen: $P(A_1 \cup \ldots$

$$\boxed{P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} P(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k})}$$

16 **2.8 Zentraler Grenzwertsatz** ZGWS **Def.**: Zwei Zufallsvariablen $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ heißen identisch verteilt, wenn $\rho_X = \rho_Y$ (bzw. $P_X = P_Y$) gilt. Urbilder müssen zu den gleichen Wahrscheinlichkeiten führen

Satz (Zentr. Grenzwertsatz): Für eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\sigma := \sigma X_1 = \sigma X_2 = \ldots > 0$ (=0 nur bei einem einzelnen Wert für P) und beliebigem $\mu := EX_1 = EX_2 = \ldots \in \mathbb{R}$ gilt für alle $b \in \mathbb{R}$ die Grenzwertformel.

Erwartungswert der Summe der Größen

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} P\left\{ \frac{X_1 + \ldots + X_n - n \cdot \mu}{\sigma \sqrt{n}} \le b \right\} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\phi(b)}}$$

Vergleichsparameter (Zahl)

Standard-Normalverteilung

03.04.2014

Interpretation des ZGWS Für „große" $n \in \mathbb{N}$ gilt $P\left\{ \underbrace{\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}}} \le b \right\} \approx \Phi(b)$

Die Zufallsvariable S_n^* ist die Standardisierung von $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ $\hat{=}$ Summe

$E(X_1 + \ldots + X_n) = EX_1 + \ldots + EX_n \overset{\text{Def.}}{\underset{\mu}{=}} \mu + \ldots + \mu = n \cdot \mu \Rightarrow \boxed{ES_n^* = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \cdot (n\mu - n\mu) = 0}$

$V(X_1 + \ldots + X_n) = V(S_n) \overset{\text{unabh.}}{=} \overbrace{VX_1}^{\sigma^2} + \ldots VX_n \Rightarrow \sigma S_n = \sqrt{\sigma^2 + \ldots + \sigma^2} = \sqrt{n \cdot \sigma^2}$

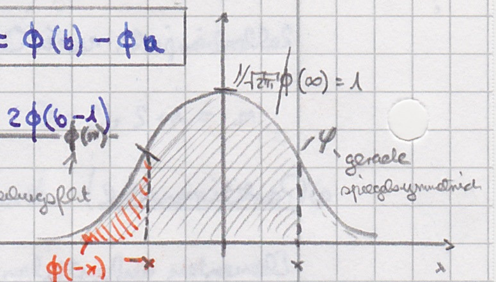
da $V(aX+b) = a^2 V(X)$ → $\sigma(aX+b) = |a|\sigma X$ ⇒ $\boxed{\sigma(S_n^*) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n\sigma^2} = 1}$

Folgerung aus dem ZGWS: $\boxed{P\{\sigma\sqrt{n}\, a \le S_n - n\mu \le \sigma\sqrt{n}\, b\} \approx \Phi(b) - \Phi(a)}$

n muss groß sein

Spezialfall: $a = -b$ $P\{|S_n - n\mu| \le b\,\underbrace{\sigma\sqrt{n}}_{=\sigma S_n}\} \approx \Phi(b) - \Phi(-b) = 2\Phi(b) - 1$

Formel $\boxed{\Phi(-b) = 1 - \Phi(b)}$



Zahlenbeispiel: 100 facher Würfelwurf

X_i := Augenzahl bei i-ten Wurf ($i \in \mathbb{N}_{100}$) ⇒ $S_n = S_{100}$ = Augensumme mit $ES_n = n \cdot \overset{3{,}5}{\mu} = 350$

und $\sigma S_n = \overset{\sqrt{n}}{\sqrt{100}} \cdot \sigma = \sqrt{100}\,\sqrt{\frac{35}{12}} \approx 17$

Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme im Intervall $350 \pm b \cdot 17$ ist:

b	$2 \cdot \Phi(b) - 1$	
1	0,682	≈ 68%
2	0,954	≈ 95%
3	0,997	≈ 100%

→ z.B. 68% im Intervall [333, 367] und 95% im Intervall [316, 384] und ≈ 100% zwischen [299, 401]

Bem. zur Güte der Approximation: Es sollte die Bedingung $\boxed{\sigma S_n > 3}$ eingehalten werden

Approximation der Binomial-Verteilung S_n := „Treffersumme" (bei n „Schüssen") bei Einzeltrefferw-keit

laut Tabelle für Binomial-Verteilung

$p \in]0,1[$ ⇒ $E S_n = n \cdot p$; $\sigma S_n = \sqrt{np(1-p)}$

$\boxed{P\{S_n - np \le b\sqrt{np(1-p)}\} \approx \Phi(b)}$ mit $p \overset{!}{>} 3$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen: $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \le \varepsilon\right\} = 1$ für alle $\varepsilon > 0$

Interpretation: Im Mittel wird schließlich der Erwartungswert erreicht (→ Mittelwert := Erwartungswert)

③ Das stetige Wahrscheinlichkeitsmodell

z.B. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ = abzählbar → überabzählbar = nicht abzählbar z.B. $\mathbb{R}$

Voraussetzung: Ereignismenge Ω überabzählbar; typischerweise $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ bzw. „gewisse" Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{Q}$ ist abzählbar) wie z.B. Intervalle von $\mathbb{R}^n$ d.h. $]a_1, \dots, b_1[\times \dots \times]a_n, \dots, b_n[$ bzw. auch mit teilweise geschlossenen Klammern.

eine Teilmenge, die man nicht mehr zählen kann

Def.: Eine stetige Fkt. $\varrho: \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ heißt W-Funktion oder auch Dichte-Funktion, wenn gilt $\int_\Omega \varrho = 1$

Bsp.: $\Omega := [a,b]$, $P([c,d]) := \frac{d-c}{b-a}$ ← Intervalllänge für $a \le c < d \le b$; $= \frac{1}{b-a} \int_c^d 1\, dx \le \varrho \cdot (b-a)$ „$\varrho = P'$" Ableitung

(Gleichverteilung auf Intervall $[a,b]$)

Def.: $EX := \int_\Omega \varrho X$ (falls konvergent) heißt Erwartungswert einer Zufallsvariablen $X: \Omega \to \mathbb{R}$

Bem.: Wie im diskreten Fall ist $P_X := P \circ X^{-1}$ (Urbild) (mit $X^{-1}(G) := \{\omega \in \mathbb{R} \mid X(\omega) \in G\}$) eine W-Verteilung auf $\mathbb{R}$.

Def.: Die Fkt. $F_X(x) := P_X(]-\infty, x]) \overset{Def.}{=} P\{X \le x\}$ heißt die (kumulative) Verteilungsfkt. von X

Wichtiges Bsp.: $\varrho := \varphi: \mathbb{R} \to [0,1]$ mit „gaußscher Glockenfunktion" $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$, siehe Graphik oben

X standard normalverteilt, d.h. $P\{X \le x\} = \Phi(x)$ ⇒ $\boxed{F_X = \Phi}$ bedeutet X ist standard Normalverteilt

Mit anderen Worten: Φ ist also die Verteilungsfkt. einer bel. standard-normalverteilten Zufallsvariablen (nach $\mathbb{R}$)

03.04.2014

SkPr Bem. zum Erwartungswert von $X: \Omega \to \mathbb{R}_0^+$; $EX = \int_0^\infty t \underbrace{F_X'(t)}_{\text{(kumulative) Verteilungsdichte}} dt = \int_0^\infty \int_0^t F_X'(t)\, dx\, dt$

a) $= \int_0^\infty \int_x^\infty F_X'(t)\, dt\, dx$ (Grenzen vertauscht) $= \int_0^\infty \overbrace{(1-F_X(x))}^{P\{X>x\}} dx$

$= \int_0^\infty P\{X \geq x\}\, dx$

a) Wenn $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ bzw. $\mathbb{R}$ unabhängig sind gilt: $\overset{\text{Dichtefkt}}{f_{X+Y}}(t) = \int_0^t f_X(x) f_Y(t-x)\, dx$ mit $t \geq 0$

bzw. $f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^\infty f_X(x) f_Y(t-x)$ mit $t \in \mathbb{R}$ für die Dichtefkt: $f_Z = F_Z'$ => Faltungsformel

Wichtige Verteilungsfunktionen

S20 A) Normalverteilung Dichte-Fkt.: $\varphi_{\mu,\sigma}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$

=> $\varphi_{0,1} = \varphi$; (Standard-Normalverteilung)

? $\Phi_{\mu,\sigma}(x) := \int_{-\infty}^x \varphi_{\mu,\sigma}(t)\, dt$ => $\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ gemäß Substitutionsregel

=> $\lim_{x\to\infty} \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$

Bem.: Die Standardisierung einer μ-σ-normalverteilten Zufallsvariable X, d.h. $P\{X \geq x\} = \Phi_{\mu,\sigma}(x)$ ist standardisiert.

Anwendungsbeispiel: In der Praxis sind EX und σX gewisse „Erfahrungswerte" einer Zufallsvariablen $X: \Omega \to \mathbb{R}$. Gemäß dem ZGWS kann bei genügend häufiger Experimentwiederholung ($\hat{=} X$) angenommen werden, dass die entsprechende Summenvariable (S_n) μ-σ-normalverteilt ist mit $\mu := EX$ und $\sigma := \sigma X$.

Zahlenbeispiel: Messfehler einer Waage: Mittelwert $\overset{\mu}{0}$ mg; Standardabweichung $\overset{\sigma}{0{,}15}$ mg

Frage: W-keit für eine Messgenauigkeit von $\pm 2\sigma = \pm 0{,}3$ mg?

Antwort (mittels μ-σ-Normalverteilung): 95% (vgl. 100 maliges Würfeln!)

S24 B) Exponentialverteilung Dichtefkt. $g_\lambda(x) := \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \in \mathbb{R}_0^+$) mit Parameter $\lambda > 0$

=> Verteilungsfkt. für eine λ-exp. verteilte Zufallsvariable $X: \Omega \to \mathbb{R}$: $P\{X \leq x\} = \int_0^x g_\lambda(t)\, dt$

$= \lambda \int_0^x e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \cdot \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_{-\infty}^x = -e^{-\lambda x} + 1 = 1 - e^{-\lambda x}$

C) Erlang-Verteilung $X_1, \ldots, X_n$ λ-exp. verteilt => $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ Erlang-verteilung der Ordnung n zum Parameter $\lambda > 0$. Dichtefkt.: $f_{S_n}(x) := \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}$

Verteilungsfkt.: $F_{S_n}(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^m}{m!}$ ($x \geq 0$) => $\boxed{ES_n = \frac{n}{\lambda}\ ;\ VS_n = \frac{n}{\lambda^2}}$

D) t- und χ^2-Verteilung relativ komplizierte Def. mittels Γ-Fkt. (die als analytische Fortsetzung $n \mapsto (n-1)!$ auf $\mathbb{N}$). Die beiden Verteilungen dienen der Bestimmung von „Konfidenzintervallen" (→ QS) von Erwartungswert bzw. Varianz einer Normalverteilten Zufallsvariablen unbekannte Varianz. Im Gegensatz dazu steht die „Erwartungswertschätzung" bei bekannter Varianz: μ-σ-normalverteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekanntem μ und bekanntem σ.

$2 \cdot \frac{39+6}{2}$

Aus ZGWS folgt für das arithmetische ~~Mittel~~ (Stichproben-) Mittel $\bar{X} := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ $\left(= \frac{S_n}{n} \right)$

-Mittelwert für n groß

2seitige -> α nur einseitige

$\boxed{P\left\{ |\bar{X} - \mu| < z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} \approx 1 - \alpha}$ für alle $\alpha \in]0,1[$. Hierbei ist $z_\alpha := \Phi^{-1}(1-\alpha)$ das sogenannte <u>α-Quantil</u>. In Worten: Mit W.keit / „Sicherheit" $1-\alpha$ liegt μ im sog. „<u>Konfidenzintervall</u>"

$\left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] := \left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Hierbei bezeichnet $\bar{x}$ einen „Beobachtungswert" von $\bar{X}$ mittels einer Stichprobe vom <u>Umfang</u> $n \in \mathbb{N}$.

<u>Zahlenbeispiel</u>: Messreihe von $n := 9$ normal-verteilten Signalwerten mit unbekanntem Mittelwert μ und bekannter Standardabweichung $\sigma := 3$: 5, 8,5, 12, 15, 7, 9, 7,5, 6,5, 10,5 $\rightarrow \bar{x} = \frac{5 + 8{,}5 + \dots + 10{,}5}{9} = 9$

Skript Seite 21 -> nicht für Prüfung

vorgegebenes „Konfidenzniveau" $\alpha := 5\%$ $\rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} \approx 1{,}96$

$\rightarrow z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{9}} = \underline{\underline{1{,}96}}$ $\Rightarrow$ Konfidenzintervall: $[9 \pm 1{,}96]$. In diesem Intervall liegt (das „wahre") μ mit 95%-iger Sicherheit